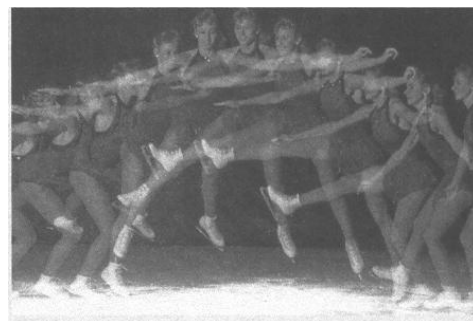


Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	<b>M2 – Quadratische Fkt - Selbsteinschätzung</b>	Datum:

Dieses Modul ermöglicht dir, alle wichtigen Aspekte im Umgang mit quadratischen Funktionen zu wiederholen und intensiv zu üben. Gib zunächst eine spontane Selbsteinschätzung in Form einer Schulnote von 1 bis 6 ab (erste Spalte in der Tabelle). Anschließend kannst du in deinem Lerntagebuch die Testaufgaben bearbeiten und mithilfe der ausführlichen Musterlösungen auswerten. So erkennst du deine Stärken und Schwächen und kannst gezielt die Standard- und die vertiefenden Aufgaben zu diesem Modul üben.



	Spontane Selbsteinschätzung (SE)	SE nach Bearbeitung der Testaufgaben	SE nach Bearbeitung des Moduls
1. Ich kann zu der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion den Graphen mithilfe einer Wertetabelle skizzieren.			
2. Ich kann zur gegebenen Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion in Scheitelpunktform den zugehörigen Graphen ohne Wertetabelle skizzieren.			
3. Ich kann zum Graphen einer quadratischen Funktion die Scheitelpunktform aufstellen.			
4. Ich kann zum vorgegebenen Scheitelpunkt sowie einem weiteren Punkt die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion bestimmen.			
5. Ich kann zum vorgegebenen y-Achsenabschnitt sowie zwei weiteren Punkten die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion bestimmen.			
6. Ich kann mithilfe der binomischen Formeln und dem Ausmultiplizieren von Summen Terme umformen.			
7. Ich kann die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion von der Scheitelpunktform in die Normalform umformen.			
8. Ich kann die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion von der Normalform in die Scheitelpunktform umformen.			
9. Ich kann einfache quadratische Gleichungen ohne pq-Formel lösen.			
10. Ich kann quadratische Gleichungen mithilfe der pq-Formel lösen.			
11. Ich kann Nullstellen und Schnittpunkte von Geraden und Parabeln berechnen und die Ergebnisse am Graphen überprüfen.			
12. Ich kann einfache Probleme mithilfe von quadratischen Funktionen lösen.			

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	<b>M2 – Quadratische Fkt - Testaufgaben</b>	Datum:

Die Aufgaben 1–12 beziehen sich auf die Punkte 1–12 der Selbsteinschätzung. Bearbeite die Aufgaben und kontrolliere dann deine Lösung mithilfe der Musterlösungen auf den folgenden Seiten.

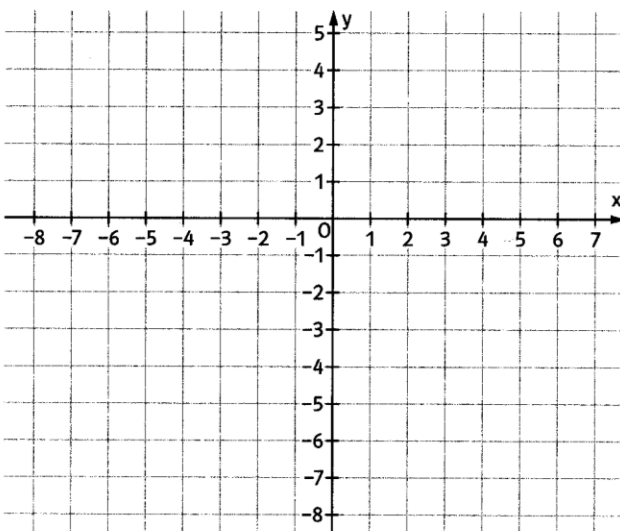
**1** Skizziere die Graphen zu den folgenden Funktionen mithilfe einer Wertetabelle in das untere Koordinatensystem.

a)  $f(x) = 0,75x^2$

x										
f(x)										

b)  $f(x) = -3x^2 - 9x - 3$

x										
f(x)										



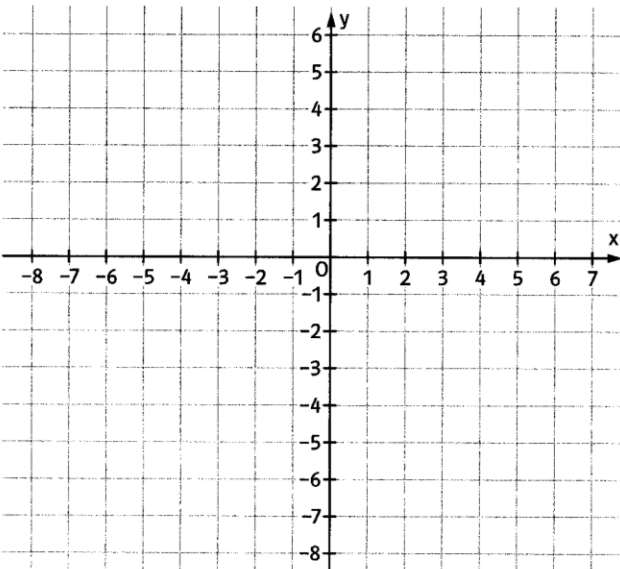
**2** Skizziere die Graphen der folgenden quadratischen Funktionen ohne Wertetabelle.

a)  $f(x) = (x - 3)^2 - 1$

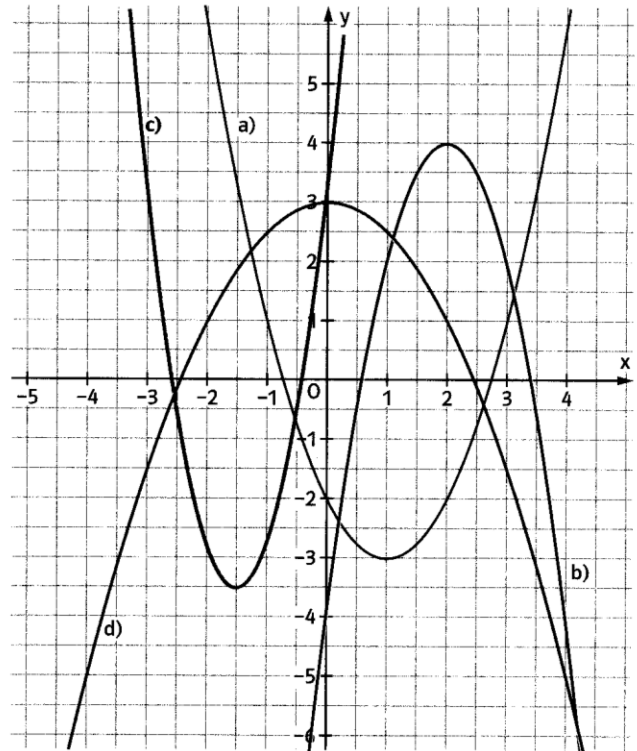
b)  $f(x) = -(x + 2)^2 + 4$

c)  $f(x) = 0,5(x - 1)^2 - 2,5$

d)  $f(x) = -2(x - 1)^2 + 2,5$



**3** Bestimme die Funktionsgleichungen in Scheitelpunktform zu den folgenden Graphen.



a)  $f(x) =$  \_\_\_\_\_

b)  $f(x) =$  \_\_\_\_\_

c)  $f(x) =$  \_\_\_\_\_

d)  $f(x) =$  \_\_\_\_\_

**4** Bestimme die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion f, deren Graph einen Scheitelpunkt S(1|2) besitzt und durch A(3|0) geht.

$f(x) =$  \_\_\_\_\_

**5** Bestimme die Funktionsgleichung der Funktion f.

a) Der Graph von f verläuft durch die Punkte A(0|3), B(-1|6) und C(2|3).

$f(x) =$  \_\_\_\_\_

b) Der Graph von f verläuft durch die Punkte A(6|3), B(0|-9) und C(1|3).

$f(x) =$  \_\_\_\_\_

Ma Jg:

Ab: Vertiefungsfach Mathe

Sj:

Name:

**M2 – Quadratische Fkt - Testaufgaben**

Datum:

**6** Vereinfache die Terme mithilfe der binomischen Formeln und dem Ausmultiplizieren von Summen.

a)  $(a + 9)^2 =$  \_\_\_\_\_

b)  $-(7 - 5b)^2 + 2b =$  \_\_\_\_\_

c)  $(6 + 5a)(6 - 5a) =$  \_\_\_\_\_

d)  $(1,5 + 3z)(-2z - 8) =$  \_\_\_\_\_

**7** Führe die Funktionsgleichung in die Normalform über.

a)  $f(x) = (x - 3)^2 + 6 =$  \_\_\_\_\_

b)  $f(x) = -2(x + 5)^2 - 7 =$  \_\_\_\_\_

**8** Überführe in die Scheitelpunktform.

a)  $f(x) = x^2 + 6x - 3 =$  \_\_\_\_\_

b)  $f(x) = -3x^2 + 6x + 7 =$  \_\_\_\_\_

c)  $f(x) = 4x + 0,4x^2 - 8 =$  \_\_\_\_\_

**9** Gib die Lösung bzw. die Lösungen der quadratischen Gleichung an.

a)  $x^2 - 49 = 0$

$x_1 =$  \_\_\_\_\_ ;  $x_2 =$  \_\_\_\_\_

b)  $-91 + 4x^2 = -3x^2$

$x_1 =$  \_\_\_\_\_ ;  $x_2 =$  \_\_\_\_\_

c)  $6x^2 - 72x = 0$

$x_1 =$  \_\_\_\_\_ ;  $x_2 =$  \_\_\_\_\_

d)  $28x^2 - 4x = 6(5x^2 + 2x)$

$x_1 =$  \_\_\_\_\_ ;  $x_2 =$  \_\_\_\_\_

**10** Löse die folgenden quadratischen Gleichungen.

a)  $x^2 + 6x + 8 = 0$

$x_1 =$  \_\_\_\_\_ ;  $x_2 =$  \_\_\_\_\_

b)  $79 - 3x^2 - 8x = 5$

$x_1 =$  \_\_\_\_\_ ;  $x_2 =$  \_\_\_\_\_

c)  $-11x - 2 + 2x^2 = 4$

$x_1 =$  \_\_\_\_\_ ;  $x_2 =$  \_\_\_\_\_

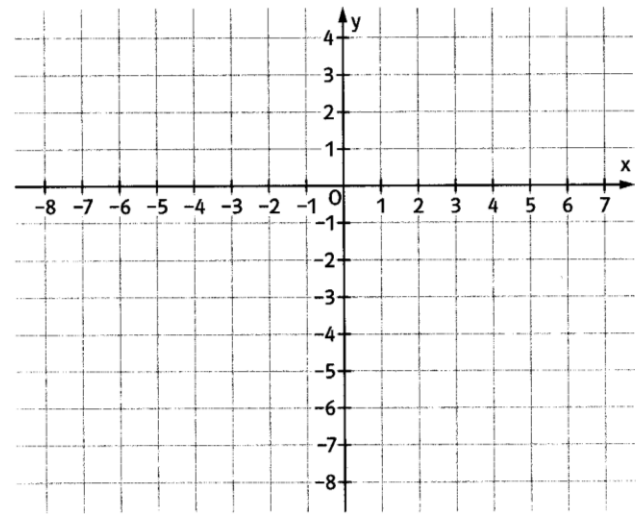
**11** Bestimme die Nullstellen und Schnittpunkte der Funktionen f mit  $f(x) = x^2 + 5x + 4$  und g mit  $g(x) = 0,5x + 1$ .

Überprüfe deine Ergebnisse an den beiden Graphen.

Nullstellen: f:  $x_1 =$  \_\_\_\_\_ ;  $x_2 =$  \_\_\_\_\_ ; g:  $x =$  \_\_\_\_\_

Schnittpunkte von f und g:

$S_1($  \_\_\_\_\_ | \_\_\_\_\_ ) ;  $S_2($  \_\_\_\_\_ | \_\_\_\_\_ ).



**12** Die Flugkurve eines Speers kann mithilfe der Funktion h mit  $h(x) = -0,02x^2 + 0,8x + 1,8$  beschrieben werden (x und h(x) in m).

a) Was bedeutet  $h(0)$  im Anwendungskontext?

$h(0)$  \_\_\_\_\_

b) Wie weit fliegt der Speer?

Antwort: \_\_\_\_\_

c) Wie hoch ist der Speer am höchsten Punkt seiner Flugbahn?

Antwort: \_\_\_\_\_

Ma Jg:	Ab: Vertiefungsfach Mathe	Sj:
Name:	<b>M2 – Quadratische Fkt - Lösungen</b>	Datum:

Kontrolliere mithilfe der folgenden Musterlösungen deine Lösungen der Testaufgaben. Führe dann eine erneute Selbsteinschätzung der wichtigsten Kompetenzen im Bereich „Quadratische Funktionen und Gleichungen“ durch.

### 1 Graphen mithilfe einer Wertetabelle skizzieren

Zunächst müssen für  $x$  sinnvolle Werte in  $f(x)$  eingesetzt werden, sodass der Scheitelpunkt der Parabel beim Zeichnen zu sehen ist.

Die Funktion in Aufgabenteil a) hat ihren Scheitelpunkt offensichtlich in  $(0|0)$ , weshalb Werte um  $x = 0$  sinnvoll sind (vgl. Wertetabelle). Wenn man Werte rechts von  $x = 0$  in  $f(x)$  einsetzt, kann man aufgrund der Symmetrie einer Parabel auf die entsprechenden Werte links von  $x = 0$  schließen, ohne zu rechnen.

Um herauszufinden, welche Werte in Aufgabenteil b) sinnvoll sind, setzt man zunächst einen beliebigen  $x$ -Wert in  $f(x)$  ein, z. B.  $x = 0$ .

$f(0) = -3$ , also ist  $(0|-3)$  ein Punkt des Graphen von  $f$ , der ins Koordinatensystem eingetragen werden kann. Jetzt wird ein  $x$ -Wert rechts oder links von  $x = 0$  in  $f(x)$  eingesetzt, z. B.  $x = 1$ :  $f(1) = -15$ . Da  $y = -15$  nicht mehr im vorgegebenen Koordinatensystem zu sehen ist, ist dieser Punkt  $(1|-15)$  nicht sehr sinnvoll.

Man setzt also z. B.  $x = -1$  ein und erhält:  $f(-1) = 3$ . Da auch  $f(-2) = 3$  und jede Parabel symmetrisch ist, kann man folgern, dass der Scheitelpunkt der Funktion genau zwischen  $x = -1$  und  $x = -2$  liegt, also bei  $x = -1,5$ .

$f(-1,5) = 3,75$ , also ist  $S(-1,5|3,75)$  der Scheitelpunkt von  $f$ .

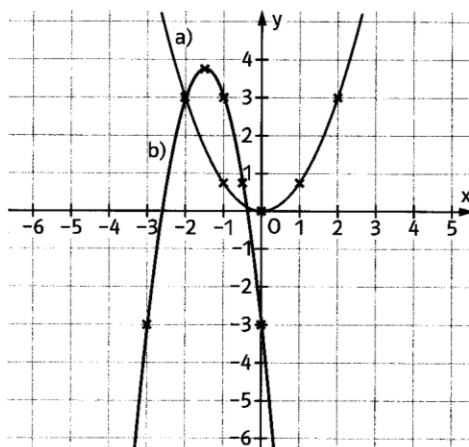
a)  $f(x) = 0,75x^2$

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6,75	3	0,75	0	0,75	3	6,75

b)  $f(x) = -3x^2 - 9x - 3$

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	3	3	-3	-15	-33	-57

Graphen der Funktionen aus a) und b):



Sinnvolle  $x$ -Werte durch Ausprobieren finden.

Symmetrie einer Parabel ausnutzen.

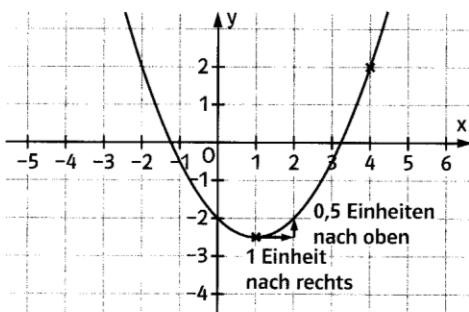
### 2 Graphen skizzieren ohne Wertetabelle

Im Folgenden wird das Vorgehen exemplarisch an Aufgabenteil c) erläutert.

Der Funktionsgleichung  $f(x) = 0,5(x - 1)^2 - 2,5$  in Scheitelpunktform kann man die Koordinaten des Scheitelpunkts  $S(1|-2,5)$  direkt entnehmen und ins Koordinatensystem einzeichnen (rechts).

Da der Streckfaktor ( $a = 0,5$ ) vor der Klammer positiv ist, ist die Parabel nach oben geöffnet.

Um die Parabel zu skizzieren, kann man vom Scheitelpunkt aus eine Einheit nach rechts und 0,5 Einheiten nach oben gehen.



Damit die Skizze des Funktionsgraphen etwas genauer ist, kann ein weiterer beliebiger Punkt  $P(4|2)$  durch Einsetzen in  $f(x)$  bestimmt und anschließend ins Koordinatensystem eingetragen werden.

**Scheitelpunktform**  
 $f(x) = a(x - d)^2 + e$   
 $S(d|e)$   
 Streckfaktor  $a$

$a > 0 \Rightarrow$  Parabel nach oben geöffnet.  
 $a < 0 \Rightarrow$  Parabel nach unten geöffnet.

Ma Jg:

Ab: Vertiefungsfach Mathe

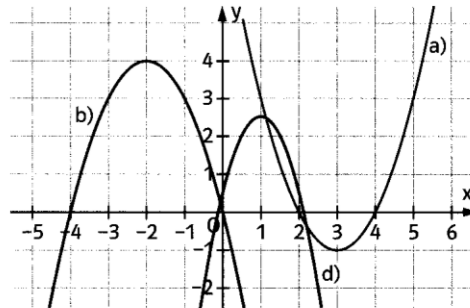
Sj:

Name:

**M2 – Quadratische Fkt - Lösungen**

Datum:

Die Graphen zu den Funktionsgleichungen in a), b) und d) werden entsprechend skizziert (vgl. rechts). Handelt es sich um eine Normalparabel, geht man vom Scheitelpunkt aus immer eine Einheit nach rechts und eine Einheit nach oben bzw. unten.



$d > 0 \Rightarrow$  Parabel ist um  $d$  Einheiten nach links verschoben.  
 $d < 0 \Rightarrow$  Parabel ist um  $d$  Einheiten nach rechts verschoben.  
 $e > 0 \Rightarrow$  Parabel ist um  $e$  Einheiten nach oben verschoben.  
 $e < 0 \Rightarrow$  Parabel ist um  $e$  Einheiten nach unten verschoben.

**3 Funktionsgleichungen zu Graphen bestimmen**

Im Folgenden wird das Vorgehen exemplarisch an Aufgabenteil c) erläutert.

Zunächst liest man die Koordinaten des Scheitelpunkts  $S(-1,5 | -3,5)$  im Koordinatensystem ab und setzt sie in die allgemeine Scheitelpunktform

$f(x) = a(x - d)^2 + e$  für  $d$  bzw.  $e$  ein:

$$f(x) = a(x - (-1,5))^2 - 3,5 = a(x + 1,5)^2 - 3,5.$$

Nun muss der Faktor  $a$  bestimmt werden.

Dieses kann man entweder direkt aus dem Koordinatensystem ablesen oder mithilfe eines beliebigen Punktes  $P$  der Parabel durch Einsetzen der Koordinaten für  $x$  und  $y$  berechnen.

Zum Ablesen des Streckfaktors  $a$  geht man vom Scheitelpunkt  $S(-1,5 | -3,5)$  aus eine Einheit nach rechts und anschließend nach oben, bis man wieder auf den Graphen trifft. Die Einheiten, die man nach oben geht, entsprechen dem Streckfaktor  $a$ . Der Streckfaktor  $a$  ist also 3, da man vom Scheitelpunkt  $S$  aus eine Einheit nach rechts und drei Einheiten nach oben geht, um wieder auf die Parabel zu treffen.

Die Funktionsgleichung lautet also  $f(x) = 3(x + 1,5)^2 - 3,5$ .

Auf den Streckfaktor  $a = 3$  kommt man ebenfalls rechnerisch, wenn man z. B. den Punkt  $P(-2,5 | -0,5)$  in  $f(x)$  einsetzt und anschließend die Gleichung nach  $a$  auflöst:

$$-0,5 = a(-2,5 + 1,5)^2 - 3,5$$

$$-0,5 = a \cdot 1 - 3,5 \quad | + 3,5$$

$$3 = a$$

Die Funktionsgleichungen zu den Aufgabenteilen a), b) und d) erhält man entsprechend:

$$a) f(x) = (x - 1)^2 - 3$$

$$b) f(x) = -2(x - 2)^2 + 4$$

$$d) f(x) = -0,5x^2 + 3$$

**4 Funktionsgleichung in SP-Form bestimmen**

Gegeben sind ein Punkt und der Scheitelpunkt der Parabel. Als allgemeiner Ansatz wird also die Scheitelpunktform gewählt.

Allgemeiner Ansatz:  $f(x) = a(x - d)^2 + e$

$S(1|2)$  in  $f(x)$  einsetzen:  $f(x) = a(x - 1)^2 + 2$

Um den Streckfaktor  $a$  zu bestimmen, wird der Punkt  $A(3 | 0)$  in die Gleichung eingesetzt:

$$0 = a(3 - 1)^2 + 2 \quad | \text{ Vereinfachen}$$

$$0 = a \cdot 2^2 + 2 \quad | \text{ Vereinfachen}$$

$$0 = 4a + 2 \quad | - 2$$

$$-2 = 4a \quad | : 4$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion  $f$  ist also  $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$ .

1. Scheitelpunkt  $S(d | e)$  ablesen und einsetzen in die allgemeine Scheitelpunktform  $f(x) = a(x - d)^2 + e$ .
2. Streckfaktor  $a$  durch Ablesen aus dem Graphen oder rechnerisch durch Einsetzen eines Punktes des Graphen in die Funktionsgleichung für  $x$  und  $y$  bestimmen.

**Scheitelpunktform**

$$f(x) = a(x - d)^2 + e$$

$S(d | e)$

Streckfaktor  $a$

Ma Jg:

Ab: Vertiefungsfach Mathe

Sj:

Name:

**M2 – Quadratische Fkt - Lösungen**

Datum:

**5 Funktionsgleichung in Normalform bestimmen**

a) Aus den Koordinaten von A(0|3) kann man den y-Achsenabschnitt  $c = 3$  entnehmen. Durch Einsetzen von B und C lässt sich die Normalform bestimmen.

Allgemeiner Ansatz:  $f(x) = ax^2 + bx + c$

y-Achsenabschnitt  $c = 3$  einsetzen:  $f(x) = ax^2 + bx + 3$

$$\begin{array}{l} \text{B}(-1|6) \text{ einsetzen: } 6 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 3 \\ 6 = a - b + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \text{ vereinfachen} \\ | - 3 + b \end{array}$$

$$a = 3 + b \quad \text{(I)}$$

$$\begin{array}{l} \text{C}(2|3) \text{ einsetzen: } 3 = a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + 3 \\ 3 = 4a + 2b + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \text{ vereinfachen} \\ | - 3 \end{array}$$

$$0 = 4a + 2b \quad \text{(II)}$$

Nach obigen Umformungen bietet sich das **Einsetzungsverfahren**

an,  $a = 3 + b$  wird in Gleichung II eingesetzt:

$$\begin{array}{l} 0 = 4 \cdot (3 + b) + 2b = 12 + 4b + 2b = 12 + 6b \quad | - 12 \\ -12 = 6b \quad | : 6 \\ b = -2 \end{array}$$

Es wird  $b = -2$  in Gleichung I eingesetzt, um  $a$  zu erhalten:  $a = 3 + (-2) = 1$ .

$a$  und  $b$  werden in die allgemeine Gleichung eingesetzt:

Die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion  $f$  ist also  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ .

b) Aus den Koordinaten von B(0|-9) kann man den y-Achsenabschnitt  $c = -9$  entnehmen. Durch Einsetzen von A und C lässt sich die Normalform bestimmen.

Allgemeiner Ansatz:  $f(x) = ax^2 + bx + c$

y-Achsenabschnitt ist  $c = -9$  einsetzen:  $f(x) = ax^2 + bx - 9$

$$\begin{array}{l} \text{A}(6|3) \text{ einsetzen: } 3 = a \cdot (6)^2 + b \cdot (6) - 9 \\ 3 = 36a + 6b - 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \text{ vereinfachen} \\ | + 9 \end{array}$$

$$12 = 36a + 6b \quad | : (-6)$$

$$-2 = -6a - b \quad \text{(I)}$$

$$\begin{array}{l} \text{C}(1|3) \text{ einsetzen: } 3 = a \cdot (1)^2 + b \cdot (1) - 9 \\ 3 = a + b - 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \text{ vereinfachen} \\ | + 9 \end{array}$$

$$12 = a + b \quad \text{(II)}$$

Nach obigen Umformungen bietet sich das **Additionsverfahren**

an, Gleichung I und Gleichung II werden addiert:

$$\text{I} + \text{II: } 10 = -5a, \text{ also } a = -2$$

Jetzt wird  $a = -2$  in Gleichung II eingesetzt, um  $b$  zu erhalten:

$$12 = -2 + b, \text{ also } b = 14$$

$a$  und  $b$  werden in die allgemeine Gleichung eingesetzt:

Die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion  $f$  ist also  $f(x) = -2x^2 + 14x - 9$ .

**6 Binomischen Formeln/Ausmultiplizieren von Summen**

a) Anwenden der 1. binomischen Formel ergibt:  $(a + 9)^2 = a^2 + 18a + 81$

b) Anwenden der 2. binomischen Formel ergibt:

$$\begin{array}{l} -(7 - 5b)^2 + 2b = -(49 - 70b + 25b^2) + 2b \quad | \text{ Klammer auflösen} \\ = -49 + 70b - 25b^2 + 2b = -49 + 72b - 25b^2 \end{array}$$

c) Anwenden der 3. binomischen Formel ergibt:  $(6 + 5a)(6 - 5a) = 36 - 25a^2$

d) Ausmultiplizieren der Summen ergibt:

$$\begin{array}{l} (1,5 + 3z)(-2z - 8) = -3z - 12 - 6z^2 - 24z \quad | \text{ zusammenfassen} \\ = -6z^2 - 27z - 12 \end{array}$$

**7 Funktionsgleichung in Normalform umformen**

a)  $f(x) = (x - 3)^2 + 6$  | 2. BF

$$= x^2 - 6x + 9 + 6$$

$$= x^2 - 6x + 15$$

b)  $f(x) = -2(x + 5)^2 - 7$  | 1. BF

$$= -2(x^2 + 10x + 25) - 7$$

$$= -2x^2 - 20x - 50 - 7$$

$$= -2x^2 - 20x - 57$$

**Normalform**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

y-Achsenabschnitt  $c$

Streckfaktor  $a$

**Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme****Einsetzungsverfahren**

- eine Gleichung nach einer Variablen auflösen
- diese Gleichung in die andere einsetzen

**Gleichsetzungsverfahren**

- beide Gleichungen besitzen denselben Term mit Variable auf einer Seite des Gleichheitszeichens (z. B.  $y = \dots$ )
- die Gleichungen gleichsetzen und lösen

**Additionsverfahren**

- in beiden Gleichungen befindet sich ein identischer Summand mit Variable, aber gegensätzliche Vorzeichen (z. B.  $5a$  und  $-5a$ )
- die Gleichungen addieren und lösen

**Binomische Formeln (BF)**

$$1. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

**Ausmultiplizieren von Summen**

$$(a + b)(c + d) =$$

$$= ac + ad + bc + bd$$

Ma Jg:

Ab: Vertiefungsfach Mathe

Sj:

Name:

**M2 – Quadratische Fkt - Lösungen**

Datum:

**8 Funktionsgleichungen von Normalform in Scheitelpunktform**

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x^2 + 6x - 3 \\ &= x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 - 3 \\ &= (x + 3)^2 - 3^2 - 3 \\ &= (x + 3)^2 - 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= -3x^2 + 6x + 7 \\ &= -3(x^2 - 2x) + 7 \\ &= -3(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 7 \\ &= -3((x - 1)^2 - 1) + 7 \\ &= -3(x - 1)^2 + 3 + 7 \\ &= -3(x - 1)^2 + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= 4x + 0,4x^2 - 8 && | \text{ Faktor „0,4“ vor } x^2 \text{ ausklammern} \\ &= 0,4(x^2 + 10x) - 8 && | \text{ mit } \left(\frac{10}{2}\right)^2 \text{ quadratisch ergänzen} \\ &= 0,4(x^2 + 10x + 5^2 - 5^2) - 8 && | \text{ 1. BF anwenden} \\ &= 0,4((x + 5)^2 - 25) - 8 && | \text{ äußere Klammer auflösen} \\ &= 0,4(x + 5)^2 - 10 - 8 \\ &= 0,4(x + 5)^2 - 18 \end{aligned}$$

**Quadratische Ergänzung**

1. Faktor vor dem  $x^2$  ausklammern.
2. Faktor vor dem  $x$  erst halbieren, dann quadrieren und anschließend „ergänzen“.

**9 Lösen einfacher quadratischer Gleichungen**

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 49 &= 0 && | + 49 \\ x^2 &= 49 && | \text{ Wurzelziehen} \\ x_1 &= 7; x_2 &= -7 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{b) } -91 + 4x^2 &= -3x^2 && | - 4x^2 \\ -91 &= -7x^2 && | : (-7) \\ 13 &= x^2 && | \text{ Wurzelziehen} \\ x_1 &= \sqrt{13}; x_2 &= -\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 6x^2 - 72x &= 0 && | \text{ Ausklammern} \\ x(6x - 72) &= 0 \\ x_1 &= 0 \text{ oder } 6x - 72 = 0 && | + 72 \\ & && 6x = 72 && | : 6 \\ & && x_2 &= 12 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{d) } 28x^2 - 4x &= 6(5x^2 + 2x) && | \text{ Umformung} \\ 28x^2 - 4x &= 30x^2 + 12x && | -28x^2 + 4x \\ 0 &= 2x^2 + 16x && | \text{ Ausklammern} \\ 0 &= 2x(x + 8) \\ x_1 &= 0 \text{ oder } x + 8 = 0 && | - 8 \\ x_2 &= -8 \end{aligned}$$

**Gleichungen vom Typ**

**$ax^2 + c = 0$**

1.  $x^2$  alleine auf eine Seite bringen.
2. Wurzelziehen (die negative Lösung nicht vergessen!).

**Gleichungen vom Typ**

**$ax^2 + bx = 0$**

1.  $x$  ausklammern.
2. Da ein Produkt dann gleich null ist, wenn einer der Faktoren gleich Null ist, werden beide Faktoren gleich 0 gesetzt und die entstehenden Gleichungen gelöst.

**10 Lösen allgemein quadratischer Gleichungen**

a)  $x^2 + 6x + 8 = 0$ ;  $p = 6$  und  $q = 8$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1} = -3 \pm 1$$

$$x_1 = -2; x_2 = -4$$

b) Die Gleichung wird zunächst in die Form  $x^2 + px + q = 0$  gebracht, um anschließend die pq-Formel anzuwenden:

$$\begin{aligned} 79 - 3x^2 - 8x &= 5 && | - 5 \\ -3x^2 - 8x + 74 &= 0 && | : (-3) \\ x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{74}{3} &= 0; && p = \frac{8}{3} \text{ und } q = -\frac{74}{3} \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{74}{3}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{238}{9}} = -\frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{238}}{3}$$

$$x_1 \approx 3,809; x_2 \approx -6,476$$

c) Die Gleichung wird zunächst in die Form  $x^2 + bx = c$  gebracht und anschließend mit quadratischer Ergänzung gelöst.

$$\begin{aligned} -11x - 2 + 2x^2 &= 4 && | \text{ Summanden vertauschen} \\ 2x^2 - 11x - 2 &= 4 && | : 2 \\ x^2 - 5,5x - 1 &= 2 && | + 1 \\ x^2 - 5,5x &= 3 && | + 2,75^2 \text{ (quadratische Ergänzung)} \\ x^2 - 5,5x + 2,75^2 &= 10,5625 && | \text{ 2. BF anwenden} \\ (x - 2,75)^2 &= 10,5625 && | \text{ Wurzelziehen} \\ x - 2,75 &= 3,25 && \text{ oder } x - 2,75 = -3,25 \\ x &= 6 && \text{ oder } x = -0,5 \end{aligned}$$

**1. Möglichkeit**

1. Gleichung in die Form  $x^2 + px + q = 0$  bringen.
2.  $p$  und  $q$  ablesen und in pq-Formel einsetzen.  
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
3. Vereinfachen.

**2. Möglichkeit**

1. Auf einer Seite der Gleichung die 1. oder 2. BF erzeugen.
2. BF als Klammerterm schreiben.
3. Wurzelziehen.

Ma Jg:

Ab: Vertiefungsfach Mathe

Sj:

Name:

**M2 – Quadratische Fkt - Lösungen**

Datum:

**11 Nullstellen und Schnittpunkte**

$$f(x) = x^2 + 5x + 4; \quad g(x) = 0,5x + 1$$

Nullstellen von f:

$$x^2 + 5x + 4 = 0; \quad p = 5 \text{ und } q = 4$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4}$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = -4$$

Nullstelle von g:

$$0,5x + 1 = 0 \quad | -1$$

$$0,5x = -1 \quad | : 0,5$$

$$x = -2$$

Schnittpunkte von f und g:

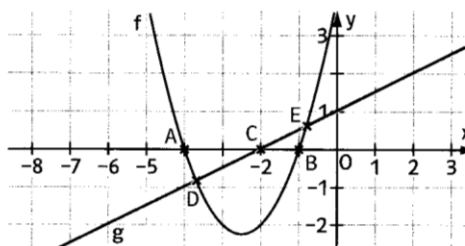
$$x^2 + 5x + 4 = 0,5x + 1 \quad | - 0,5x - 1$$

$$x^2 + 4,5x + 3 = 0; \quad p = 4,5 \text{ und } q = 3$$

$$x_{1,2} = -\frac{9}{4} \pm \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 - 3}$$

$$x_{1,2} = -\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{53}{16}} = -\frac{9}{4} \pm \frac{\sqrt{53}}{4}$$

$$x_1 \approx -0,814; \quad x_2 \approx -3,686$$



**Nullstellen von f**  
Gleichung  $f(x) = 0$  lösen.

**Schnittpunkte von f und g**

1. Gleichung  $f(x) = g(x)$  lösen.
2. Lösungen der Gleichung in  $f(x)$  oder  $g(x)$  einsetzen (es muss dasselbe herauskommen).

Um die y-Werte der Schnittpunkte zu erhalten, setzt man die x-Werte in  $f(x)$  oder  $g(x)$  ein:

$$g(-0,814) = 0,593; \quad g(-3,686) = -0,843.$$

Also  $S_1(\approx -0,814 | \approx 0,593)$  und  $S_2(\approx -3,686 | \approx -0,843)$ .

Die Überprüfung am Graphen bestätigt die berechneten Werte.

**12 Anwendung quadratischer Funktionen**

a)  $h(0) = 1,8$  entspricht der Höhe des Speers bei einer Entfernung von 0 m vom Abwurfpunkt. Also entsprechen 1,8 m der Abwurfhöhe, die beim Speerwurf etwa der Kopfhöhe des Werfers entspricht.

b) Um die Weite des Speers zu bestimmen, werden die Nullstellen von  $h$  bestimmt, denn eine Nullstelle entspricht der Höhe  $h = 0$  und damit der Bodenhöhe beim Aufprall.

$$\text{Also gilt } -0,02x^2 + 0,8x + 1,8 = 0$$

$$x^2 - 40x - 90 = 0;$$

$$| : (-0,02)$$

$$p = -40 \text{ und } q = -90$$

$$x_{1,2} = 20 \pm \sqrt{(20)^2 + 90} = 20 \pm \sqrt{490}$$

$$x_1 \approx 42,14; \quad x_2 \approx -2,14$$

Für den Speerwurf ist nur die Nullstelle  $x_1$  interessant, der Speer wird also etwa 42,14 m weit geworfen.

c) Die Höhe am höchsten Punkt entspricht dem y-Wert des Scheitelpunktes von  $h$ . Um den Scheitelpunkt von  $h$  zu bestimmen, kann man die Funktionsgleichung von der Normalform mithilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelpunktform überführen (vgl. Lösungen zu Aufgabe 8).

Hat man aber die Nullstellen der Funktion bereits gegeben, lässt sich der Scheitelpunkt auch mithilfe der Nullstellen und der Symmetrieeigenschaften einer Parabel bestimmen.

Der x-Wert des Scheitelpunktes muss genau zwischen den beiden Nullstellen,

also bei  $x = \frac{42,14 + (-2,14)}{2} = 20$ , liegen.  $x = 20$  wird nun in  $h(x)$  eingesetzt, um den y-Wert zu erhalten:

$$h(20) = -0,02 \cdot 20^2 + 0,8 \cdot 20 + 1,8 = 9,8.$$

Der Speer ist an seinem höchsten Punkt also 9,8 m hoch.

**Lösungsstrategie**

1. Anwendungskontext in mathematischen Term oder Gleichung übersetzen (y-Achsenabschnitt, Punkt des Graphen, Nullstellen, Scheitelpunkt gesucht?)
2. Ggf. Gleichung lösen.
3. Lösung im Kontext interpretieren.